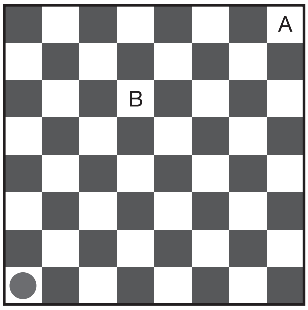
Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

7 Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d’angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?



■ **Figura 5**

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all’estero, Europa, 2016.

7 Osserviamo per prima cosa che ogni percorso dalla casella iniziale alla casella indicata con A è costituito da 7 mosse della pedina verso destra e da 7 mosse verso l'alto, che possono essere effettuate in qualunque ordine. Il numero totale dei percorsi possibili è uguale quindi al numero di modi in cui si possono scegliere le mosse verso destra tra le 14 mosse da effettuare (le mosse verso l'alto saranno quindi le 7 mosse rimanenti). Pertanto, il numero di percorsi è:

$$C_{14,7} = \binom{14}{7} = \frac{14!}{7!7!} = 3432.$$

Calcoliamo adesso il numero di percorsi dalla casella iniziale alla casella A che passano per la casella B. Ciascuno di questi percorsi può essere scomposto in un percorso dalla casella iniziale a B e in un percorso dalla casella B alla casella A.
Per andare dalla posizione iniziale a B bisogna compiere 8 mosse, di cui 3 verso destra e 5 verso l'alto. Quindi il numero di percorsi è:

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56.$$

Per andare da B ad A bisogna compiere altre 6 mosse, di cui 4 verso destra e 2 verso l'alto. Quindi il numero di percorsi è:

$$C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$

Quindi, per andare dalla posizione iniziale ad A passando per B possiamo scegliere uno qualunque dei percorsi dalla posizione iniziale a B e uno qualunque dei percorsi da B ad A. In totale, sono:

$$C_{8,3} \cdot C_{6,4} = \binom{8}{3}\binom{6}{4} = 56 \cdot 15 = 840.$$

La probabilità cercata è uguale al rapporto tra il numero di percorsi passanti per B e il numero totale di percorsi:

$$P = \frac{C_{8,3} \cdot C_{6,4}}{C_{14,7}} = \frac{\binom{8}{3}\binom{6}{4}}{\binom{14}{7}} = \frac{840}{3432} = \frac{35}{143} \simeq 24,5\%.$$

Con un ragionamento simile, i percorsi dal punto iniziale ad A possono essere ottenuti dalle permutazioni con ripetizione di 14 elementi di cui 7 uguali (mosse verso l'alto) e 7 uguali (mosse verso destra) per un totale di:

$$P_{14}^{(7;\,7)} = \frac{14!}{7!7!} = 3432 \text{ percorsi.}$$

Nello stesso modo calcoliamo il numero dei percorsi dal punto iniziale a B:

$$P_{8}^{(5;\,3)} = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

e da B ad A:

$$P_{6}^{(4;\,2)} = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$

Otteniamo i casi favorevoli dal prodotto $P_8^{(5;\,3)} \cdot P_6^{(4;\,2)} = 56 \cdot 15 = 840$. Quindi, la probabilita è:

$$P = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{840}{3432} = \frac{35}{143}.$$

Osserviamo che il risultato è lo stesso che avevamo ottenuto con il metodo precedente.