**9** Sapendo che una moneta è truccata e che la probabilità che esca «testa» in un lancio è pari a $p$, determina i possibili valori che può assumere $p$, sapendo che la probabilità che esca testa esattamente 2 volte lanciando 4 volte la moneta è $\frac{8}{27}$.

**9** Se $p$ è la probabilità che esca testa in un lancio, la probabilità che esca croce sarà $1-p$.
Si tratta di un problema di prove ripetute, quindi la probabilità che in 4 lanci esca 2 volte testa e 2 volte croce è data da:

$$\binom{4}{2}p^2(1-p)^{4-2}.$$

Imponiamo che tale probabilità sia uguale a $\frac{8}{27}$ e ricaviamo $p$:

$$\binom{4}{2}p^2(1-p)^2=\frac{8}{27} \rightarrow 6p^2(1-p)=\frac{8}{27} \rightarrow$$

$$[p(1-p)]^2=\frac{8}{162} \rightarrow [p(1-p)]^2=\frac{4}{81}.$$

Abbiamo ottenuto un'equazione pura di secondo grado nella variabile $p(1-p)$. Quindi:

$$p(1-p)=\pm\frac{2}{9} \rightarrow p-p^2=\pm\frac{2}{9}, \text{ con } 0\le p\le 1 \text{ perché } p \text{ è una probabilità.}$$

Cerchiamo ora i valori di $p$ che risolvono le due equazioni di secondo grado in $p$.
Dalla prima equazione otteniamo:

$$p-p^2=\frac{2}{9} \rightarrow 9p^2-9p+2=0 \rightarrow$$

$$p=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{18}=\frac{9\pm 3}{18} \rightarrow p_1=\frac{2}{3} \vee p_2=\frac{1}{3}.$$

Entrambi i valori sono accettabili perché verificano la condizione $0\le p\le 1$.

Dalla seconda equazione otteniamo:

$$p-p^2=-\frac{2}{9} \rightarrow 9p^2-9p+2=0 \rightarrow$$

$$p=\frac{9\pm\sqrt{81+72}}{18}=\frac{9\pm\sqrt{153}}{18} \rightarrow$$

$$p_1\simeq -0,19 \vee p_2\simeq 1,19.$$

Entrambi i valori non sono accettabili perché $p_1<0$ e $p_2>1$.
Alternativamente, il procedimento diventa più snello se si utilizza la relazione:

$$0\le p\le 1 \rightarrow 0\le p(1-p)\le 1.$$

Infatti l'equazione $p(1-p)=-\frac{2}{9}$ non deve essere risolta perché è impossibile e quindi $p(1-p)=\frac{2}{9}$ è l'unica equazioni da risolvere.

Se non si riconosce l'equazione pura di secondo grado, un altro modo di procedere è il seguente.

$$\binom{4}{2}p^2(1-p)^2=\frac{8}{27} \rightarrow$$

$$6p^2(1+p^2-2p)=\frac{8}{27} \rightarrow 81p^2(1+p^2-2p)=4 \rightarrow$$

$$81p^4 - 162p^3 + 81p^2 - 4 = 0.$$

Scomponiamo il polinomio $f(p) = 81p^4 - 162p^3 + 81p^2 - 4$ con la regola di Ruffini.

Gli zeri del polinomio vanno cercati tra le frazioni del tipo $\frac{n}{m}$ con $n$ divisore di 4 e $m$ divisore di 81.

Procedendo per tentativi si trova che $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, quindi $f(p)$ è divisibile per $\left(p - \frac{1}{3}\right)$.

Procediamo con lo schema di Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 81 & -162 & 81 & 0 & -4 \\
\frac{1}{3} & & 27 & -45 & 12 & 4 \\
\hline
 & 81 & -135 & 36 & 12 & 0
\end{array}$$

Otteniamo:

$$f(p) = \left(p - \frac{1}{3}\right)(81p^3 - 135p^2 + 36p + 12) = 3\left(p - \frac{1}{3}\right)(27p^3 - 45p^2 + 12p + 4).$$

Procedendo in maniera analoga a prima, troviamo che $\frac{2}{3}$ è uno zero del polinomio di terzo grado.

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 27 & -45 & 12 & 4 \\
\frac{2}{3} & & 18 & -18 & -4 \\
\hline
 & 27 & -27 & -6 & 0
\end{array}$$

Il polinomio si scompone ulteriormente nella forma:

$$f(p) = 3\left(p - \frac{1}{3}\right)\left(p - \frac{2}{3}\right)(27p^2 - 27p - 6) = 9\left(p - \frac{1}{3}\right)\left(p - \frac{2}{3}\right)(9p^2 - 9p - 2).$$

Calcoliamo, infine, le radici del polinomio di secondo grado:

$$9p^2 - 9p - 2 = 0 \rightarrow$$

$$p = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 9 \cdot 2}}{18} = \frac{9 \pm \sqrt{153}}{18} \rightarrow$$

$$p_1 = \frac{9 - \sqrt{153}}{18} < 0 \vee p_2 = \frac{9 + \sqrt{153}}{18} > 1.$$

Poiché rappresenta una probabilità, $p$ deve essere compreso fra 0 e 1, estremi inclusi.

Quindi i valori di $p$ compresi fra 0 e 1 che annullano $f(p)$ sono due: $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

Concludiamo che nel caso in esame della moneta truccata, in cui l'evento «in 4 lanci esce 2 volte testa» si realizza con probabilità $\frac{8}{27}$, la probabilità che esca testa in un lancio è $\frac{1}{3}$ o $\frac{2}{3}$.