5 I lati di un triangolo ABC misurano: $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $CA = 5$ cm. Preso a caso un punto P all’interno del triangolo, qual è la probabilità che P sia più vicino al vertice B che al vertice A?

5 Il triangolo ABC è isoscele, con base BC.
Tracciamo l'asse di AB, che passa per il punto medio M e interseca la base BC in N. Tale asse divide il triangolo in due parti: il triangolo rettangolo BNM e il quadrilatero $NCAM$.
Sia P un punto interno al triangolo ABC. Se P è in particolare, interno al triangolo BNM, allora $BP < AP$ e quindi il punto P è più vicino al vertice B che al vertice A.
La probabilità P che si verifichi questa condizione è data da:

$$P = \frac{\text{Area}_{MBN}}{\text{Area}_{ABC}}.$$

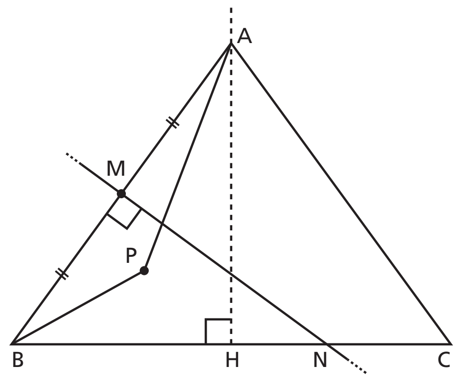

Figura 16

Calcoliamo l'area del triangolo ABC.
Utilizzando la formula di Erone $\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, con $a = 6$, $b = c = 5$ e il semiperimetro $p = 8$, otteniamo:

$$\text{Area}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8 \cdot (8-6) \cdot (8-5) \cdot (8-5)} =$$
$$\sqrt{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{144} = 12.$$

In maniera alternativa, con il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ABH, determiniamo:

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4,$$

da cui ricaviamo: $\text{Area}_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{6}^{\,3} \cdot 4 = 12.$

Calcoliamo l'area del triangolo BNM.

Sia $N\widehat{B}M = \beta$. Consideriamo il triangolo rettangolo ABH; per definizione goniometrica:

$$\tan\beta = \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \frac{4}{3}.$$

Otteniamo allora: $\overline{MN} = \overline{BM} \cdot \tan\beta = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$,

da cui: $\text{Area}_{BMN} = \frac{1}{2}\overline{BM} \cdot \overline{MN} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{\cancel{10}^{\,5}}{3} = \frac{25}{6}.$

Possiamo ora calcolare la probabilità P richiesta:

$$P = \frac{\text{Area}_{MBN}}{\text{Area}_{ABC}} = \frac{\frac{25}{6}}{12} = \frac{25}{6} \cdot \frac{1}{12} = \frac{25}{72} \simeq 0,347.$$

Quindi, la probabilità che il punto P sia più vicino al vertice B che al vertice A è circa del 34,7%.

Osserviamo che per calcolare la misura di MN potevamo utilizzare anche la similitudine. Infatti i triangoli rettangoli BMN e ABH sono simili e quindi:

$$\overline{MN} : \overline{AH} = \overline{BM} : \overline{BH} \rightarrow \overline{MN} : 4 = \frac{5}{2} : 3 \rightarrow \overline{MN} = \frac{4 \cdot \frac{5}{2}}{3} = \frac{10}{3}.$$