Liceo scientifico e opzione scienze applicate

7 Alberto e Barbara giocano lanciando un dado. Quando esce 1, 2, 3 o 4 Alberto fa 1 punto, quando esce 5 o 6 Barbara fa 2 punti. Vince chi arriva per primo a 6 punti. Qual è la probabilità che entrambi realizzino almeno 1 punto nel corso della partita? Qual è la probabilità che, in un certo momento della partita, il punteggio sia di 4 a 4?

7 A ogni lancio del dado, Alberto ha probabilità $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ di fare un punto, mentre Barbara ha probabilità $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ di fare 2 punti.

Possiamo calcolare la probabilità che sia Alberto sia Barbara realizzino almeno un punto in una partita mediante la tecnica dell'evento contrario.

Alberto fa zero punti se Barbara vince 3 lanci consecutivi (totalizzando $2 + 2 + 2 = 6$ punti), e questo avviene con probabilità:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Con ragionamento analogo, Barbara fa zero punti se Alberto vince 6 lanci consecutivi, con probabilità:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}.$$

La probabilità che Alberto e Barbara realizzino ciascuno almeno un punto in una partita è allora data da:

$$1 - \left(\frac{1}{27} + \frac{64}{729}\right) = 1 - \frac{27 + 64}{729} = 1 - \frac{91}{729} = \frac{729 - 91}{729} = \frac{638}{729} \simeq 0,875.$$

Per quanto riguarda la probabilità che, a un certo punto della partita, il punteggio sia di 4 a 4, osserviamo che tale situazione avviene se Alberto ha vinto 4 lanci e Barbara 2 lanci. Su 6 lanci, quindi, Alberto deve aver vinto esattamente 4 volte. Poiché la distribuzione è binomiale, possiamo calcolare questa probabilità p col teorema delle prove ripetute:

$$p = \binom{6}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{6-4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{9} = 5 \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{3} = \frac{80}{243} \simeq 0,33.$$