8 Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia 3 esca almeno 2 volte.

8 Indichiamo con X lo spazio campionario dei possibili esiti di un lancio e con F_n l'evento corrispondente all'uscita della faccia che riporta il numero n, con $1 \leq n \leq 12$. Abbiamo:

$$p(F_n) = \begin{cases} \frac{1}{13} & \text{se } n \neq 3 \\ \frac{2}{13} & \text{se } n = 3 \end{cases}.$$

In particolare $p = p(F_3) = \frac{2}{13} \simeq 15{,}38\%$.

Consideriamo ora X' lo spazio campionario formato da tutti i possibili esiti di 5 lanci consecutivi e indichiamo con:

- E_0 l'evento corrispondente all'uscita di 5 numeri tutti diversi da 3;
- E_1 l'evento corrispondente all'uscita di 5 numeri di cui uno solo è 3;
- E l'evento corrispondente all'uscita di 5 numeri di cui due sono 3.

Si ha che $E = X' - (E_0 \cup E_1)$. Gli eventi E_0 ed E_1 sono incompatibili, cioè non si possono verificare contemporaneamente, quindi $p(E_0 \cup E_1) = p(E_0) + p(E_1)$.

Calcoliamo $p(E)$:

$$p(E) = p(X') - p(E_0) - p(E_1) = 1 - p(E_0) - p(E_1).$$

L'esito di ogni lancio è indipendente da quello del lancio precedente, quindi:

$$p(E_0) = \binom{5}{0}[1 - p(F_3)]^5 = \left(\frac{11}{33}\right)^5;$$

$$p(E_1) = \binom{5}{1}[1 - p(F_3)]^4 p(F_3) = 5\left(\frac{11}{13}\right)^4 \frac{2}{13}.$$

In conclusione:

$$p(E) = 1 - \left(\frac{11}{13}\right)^5 - 5\left(\frac{11}{13}\right)^4 \frac{2}{13} \simeq 17{,}19\%.$$