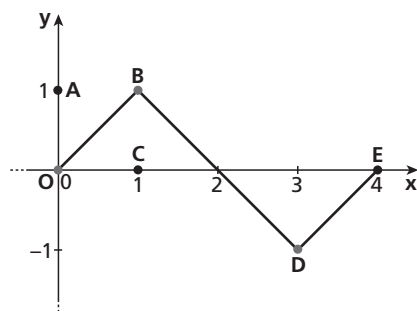


PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo $[0; 4]$, è il seguente:



■ Figura 1

Come si evince dalla figura, i tratti OB , BD , DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0; 0)$; $B(1; 1)$; $D(3; -1)$; $E(4; 0)$.

1. Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x};$$

qualora esistano, determinarne il valore.

Rappresenta inoltre, per $x \in [0; 4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x),$$

$$h(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

2. Considera la funzione:

$$s(x) = \sin(bx)$$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$. Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in figura viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3. Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \text{ e } s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4. Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0; 3]$ e l'asse delle x .

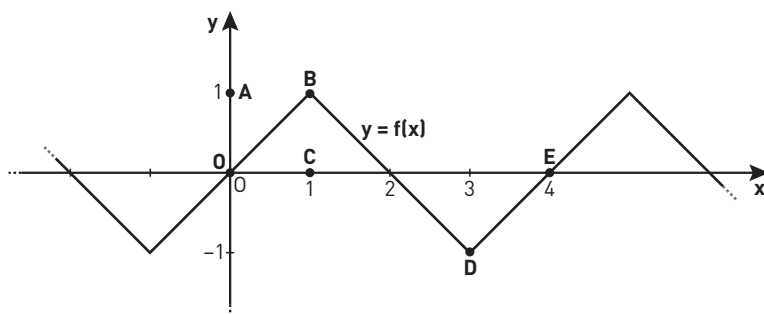
PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x)$ si può scrivere in $[0; 4]$ come

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0; 1[\\ -x + 2 & \text{se } x \in [1; 3[\\ x - 4 & \text{se } x \in [3; 4] \end{cases}$$

Disegniamo il grafico nel dominio \mathbb{R} e osserviamo che $f(x)$ si può scrivere come

$$f(x) = \begin{cases} x - 4k & \text{se } x \in [-1 + 4k; 1 + 4k[\\ -x + 2 + 4k & \text{se } x \in]1 + 4k; 3 + 4k[\end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$



■ Figura 7

Questa funzione è definita e continua in tutto il dominio \mathbb{R} perché continua a tratti e il limite destro e sinistro nei punti di congiunzione coincidono. La funzione $f(x)$ è inoltre derivabile negli intervalli aperti $] -1 + 4k; 1 + 4k[$ e $]1 + 4k; 3 + 4k[$ perché i polinomi sono funzioni derivabili. Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in] -1 + 4k; 1 + 4k[\\ -1 & \text{se } x \in]1 + 4k; 3 + 4k[\end{cases}$$

Verifichiamo la derivabilità in $]0; 4[$ nei punti di congiunzione $x = 1$, $x = 3$ analizzando i limiti della derivata prima da destra e da sinistra.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 1$$

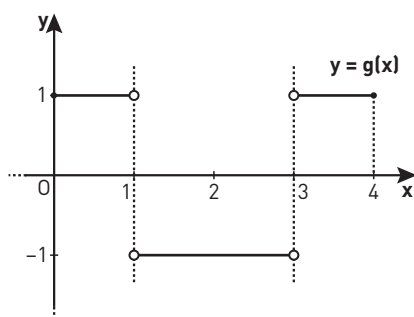
Osserviamo che i limiti destri e sinistri non coincidono, quindi $f(x)$ non è derivabile in $x = 1$ e $x = 3$. Per periodicità possiamo affermare che $f(x)$ non è derivabile nei punti $x = 1 + 4k$ e $x = 3 + 4k$ con $k \in \mathbb{Z}$, ovvero nei punti $x = 1 + 2k'$, con $k' \in \mathbb{Z}$.

Poiché $f(x)$ è una funzione periodica non costante, il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ non esiste.

Per calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ si può utilizzare il teorema del confronto. Infatti, dato che $-1 \leq f(x) \leq 1$,

si ha che $-\frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$ per $x > 0$. Ne risulta che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Disegniamo il grafico di $g(x) = f'(x)$, di cui abbiamo già calcolato l'espressione analitica.



■ Figura 8

Determiniamo l'espressione analitica di $h(x)$ per $x \in [0; 4]$, considerando i tre sottointervalli $[0; 1]$, $]1; 3]$ e $]3; 4]$.

- Per $x \in [0; 1]$, $h(x) = \int_0^x t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2}$

- Per $x \in]1; 3]$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^1 f(t) \, dt + \int_1^x (2-t) \, dt = \\ &= h(1) + \left[2t - \frac{t^2}{2} \right]_1^x = \\ &= \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 \end{aligned}$$

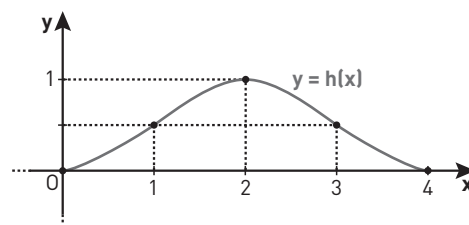
- Per $x \in]3; 4]$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^3 f(t) \, dt + \int_3^x (t-4) \, dt = \\ &= h(3) + \left[\frac{t^2}{2} - 4t \right]_3^x = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x - \frac{9}{2} + 12 = \frac{x^2}{2} - 4x + 8 \end{aligned}$$

Quindi l'espressione analitica per $h(x)$ è la seguente:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{se } x \in [0; 1] \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & \text{se } x \in [1; 3] \\ \frac{x^2}{2} - 4x + 8 & \text{se } x \in [3; 4] \end{cases}$$

Il grafico è composto da tre archi di parabola che si raccordano nei punti $(1; \frac{1}{2})$ e $(3; \frac{1}{2})$.



■ Figura 9

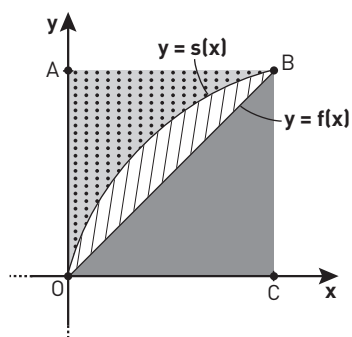
In alternativa, è possibile disegnare un grafico qualitativo di $h(x)$, osservando che la funzione integrale di funzioni lineari a tratti è formata da archi di parabola la cui concavità dipende dal segno di $g(x) = h''(x)$ e che l'area di ogni triangolo congruente a OBC è uguale a $\frac{1}{2}$.

2. Il periodo di $f(x)$ è 4, mentre il periodo di $s(x) = \sin(bx)$ è $\frac{2\pi}{b}$. Ponendo $\frac{2\pi}{b} = 4$ si ottiene

$$b = \frac{\pi}{2}.$$

I grafici di $f(x)$ e $s(x)$ dividono il quadrato $OABC$ in tre parti in quanto $f(0) = s(0) = 0$ e $f(1) = s(1) = 1$ e i grafici di $f(x)$ e $s(x)$ non hanno altri punti di intersezione in $]0; 1[$. Dimostriamo quest'ultima affermazione.

Il grafico di $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ è una contrazione orizzontale di $\sin x$ di fattore $\frac{2}{\pi}$. La funzione $\sin(x)$ sta sopra la retta congiungente il punto $(0; 0)$ e il punto $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$. Quindi il grafico di $s(x)$ in $[0; 1]$ sta sopra la funzione $f(x) = x$ e di conseguenza i due grafici non si intersecano in altri punti.



■ Figura 10

Dato che l'area del quadrato $OABC$ è uguale a 1, la probabilità di cadere su una delle tre parti sarà uguale alla misura della rispettiva area.

Calcoliamo quindi le aree.

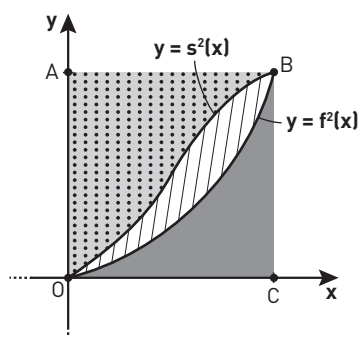
$$A_{\text{grigia}} = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$A_{\text{tratteggiata}} = \int_0^1 \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x \right] dx = \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \simeq 0,14$$

$$A_{\text{pallini}} = 1 - A_{\text{grigia}} - A_{\text{tratteggiata}} = 1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\pi} \simeq 0,36.$$

Le probabilità di cadere nelle zone grigia, tratteggiata e pallini sono quindi rispettivamente del 50%, del 14% circa e del 36% circa.

- c. Rappresentiamo le funzioni $f^2(x) = x^2$ e $s^2(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ nell'intervallo $[0; 1]$, osservando che, essendo $0 \leq f(x) \leq 1$ e $0 \leq s(x) \leq 1$, si avrà $f^2(x) \leq f(x)$ e $s^2(x) \leq s(x)$.



■ Figura 11

Quindi si avrà un aumento dell'area pallini e una diminuzione dell'area grigia; per quanto riguarda l'area tratteggiata è difficile fare una stima qualitativa.

Calcoliamo quindi le probabilità, ancora una volta uguali alle rispettive aree.

Per calcolare l'integrale di $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ utilizzeremo la formula di bisezione $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$.

$$A_{\text{grigia}} = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \simeq 0,33$$

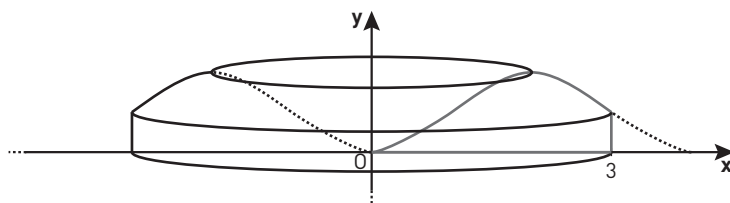
$$\begin{aligned} A_{\text{tratteggiata}} &= \int_0^1 \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^2 \right] dx = \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx - \int_0^1 x^2 dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1 - \cos(\pi x)}{2} dx - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \int_0^1 [1 - \cos(\pi x)] dx - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [x]_0^1 - \frac{1}{\pi} [\sin(\pi x)]_0^1 \right\} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\pi} (\sin \pi - \sin 0) \right] - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \simeq 0,17 \end{aligned}$$

$$A_{\text{pallini}} = 1 - A_{\text{grigia}} - A_{\text{tratteggiata}} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Le probabilità di cadere nelle zone grigia, tratteggiata e pallini sono quindi rispettivamente del 33% circa, del 17% circa e del 50%.

4. Per calcolare il volume del solido di rotazione utilizziamo il metodo dei gusci cilindrici.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^3 xh(x) dx = \\ &= 2\pi \left[\int_0^1 x \frac{x^2}{2} dx + \int_1^3 x \left(-\frac{x^2}{2} + 2x - 1 \right) dx \right] = \\ &= 2\pi \left\{ \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^3 \right\} = \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{8} - \frac{81}{8} + 18 - \frac{9}{2} + \frac{1}{8} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{83}{12} \pi \end{aligned}$$



■ Figura 12